LÖSUNGSKONZEPTE DER

SPIELTHEORIE

Aufnahmearbeit am
Institut für Höhere Studien, Wien
Abteilung:
"Mathematische Methoden und Computerverfahren"

vorgelegt von
Klaus Manhart

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

In vielen sozialen und wirtschaftlichen Situationen ist die Notwendigkeit gegeben, Entscheidungen zu treffen, deren Ergebnisse von den Handlungen anderer Akteure abhängen. Sollen solche Entscheidungssituationen zu einem "guten" Ergebnis führen, müssen bei der Wahl der eigenen Alternative immer die Aktionsmöglichkeiten der anderen Akteure mitberücksichtigt werden.
Konfliktsituationen dieser Art sind das Anwendungsgebiet der Spieltheorie. Sie ist ihrem Wesen nach eine mathematische Theorie von Konfliktsituationen und übt auf weite Bereiche der Psychologie, Ökonomie, Soziologie und Politologie einen so bedeutenden Einfluß aus, daß man ihr den Status eines Paradigmas im Kuhn'schen Sinn zusprechen kann.[1)]
Der Inhalt der Spieltheorie als mathematische Disziplin besteht in der Konstruktion mathematischer Modelle zur Analyse interindividueller Konfliktsituationen. Dabei wird versucht, für bestimmte Klassen solcher Konfliktsituationen die wesentlichen Merkmale herauszuarbeiten, diese in geeignete mathematische Modelle abzubilden, zu analysieren und dabei eine Explikation des Begriffs "rationales Verhalten" zu liefern.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich weniger mit dem Anwendungsaspekt der Spieltheorie, sondern mit einigen grundlegenden Ergebnissen, Lösungskonzepten und Problemen der reinen Theorie. Im Vordergrund steht die mathematische Darstellung, die unter Verzicht auf Beweise allerdings nicht allzu streng gehandhabt wurde und auf viele Beispiele zurückgreift.

2. Überblick und Grundbegriffe

Der Komplex Spiel- und Entscheidungstheorie kann schematisch mit folgendem Baumdiagramm dargestellt werden (vgl. Rapoport 1980: 246):

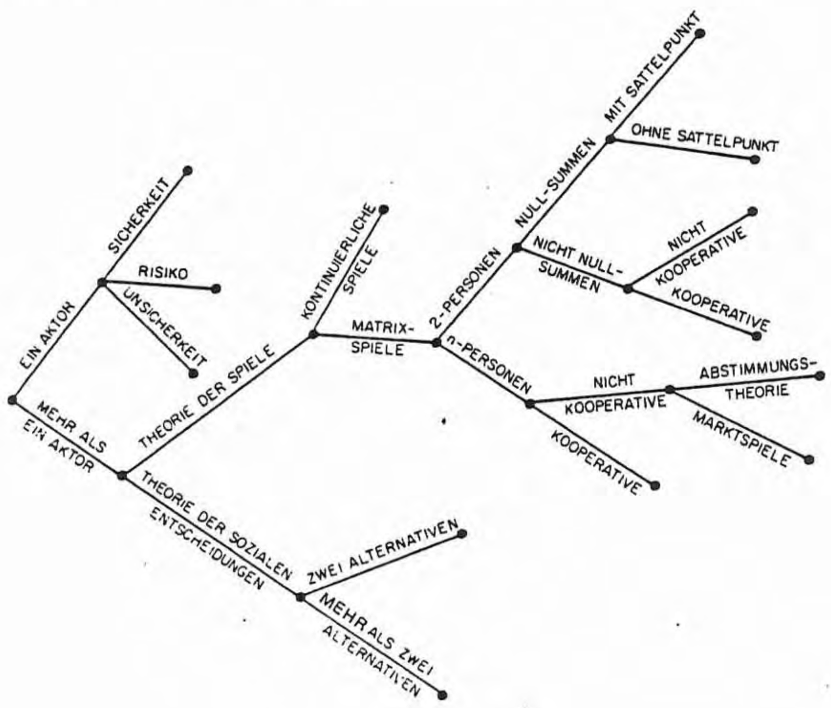


Abb. 1: Baumdarstellung der Spiel- und Entscheidungstheorie

Die erste Verzweigung des Baumes unterscheidet Situationen mit genau einem Akteur und mehreren Akteuren.
Im ersten Fall liegt eine entscheidungstheoretische Situation vor, bei der ein Akteur mit verschiedenen Wahlmöglichkeiten verschiedenen Umweltzuständen gegenüber steht und das Ergebnis bestimmt wird durch die gewählte Alternative und den eingetretenen Weltzustand. Aufgabe der Entscheidungstheorie ist es, bei Entscheidungen unter Sicherheit, Unsicherheit oder Risiko eine optimale Aktion zu bestimmen.
Den zweiten Fall - die Situationen mit mehr als einem Akteur - kann man klassifzieren in die Theorie der sozialen Entscheidungen und die Theorie der Spiele. Bei der Theorie der sozialen Entscheidungen geht es darum, aus den indivi-

duellen Präferenzordnungen mehrerer Personen eine optimale kollektive Entscheidung zu bestimmen.
Die Theorie der Spiele ist Thema dieser Arbeit. Es werden ausschließlich **Matrixspiele** betrachtet, wobei die Nullsummenspiele insofern eine herausragende Stellung einnehmen, als sie genau eine - allgemein akzeptierte - mathematische Lösung haben und es zur Bestimmung optimaler Strategien einen Algorithmus gibt. Bei Nichtnullsummenspielen und n-Personenspielen existieren meist mehrere Lösungskonzepte, die nicht die mathematische Stringenz haben wie die Lösung im Fall der Nullsummenspiele.

In einem Matrixspiel stehen sich zwei oder mehrere Spieler gegenüber, deren Interessen entweder entgegengesetzt oder gleichgerichtet sind. Die Spieler können bestimmte Alternativen oder Züge wählen, wobei der Ausgang bestimmt wird durch die Wahl der von jedem Spieler gewählten Alternative.
Zunächst kann man Spiele nach dem Umfang der Information klassifizieren, die jedem Spieler bezüglich der Operationen der anderen Spieler zu Verfügung stehen: **Spiele mit vollständiger Information** sind jene Spiele, bei denen jeder Spieler die Resultate aller vorangegangenen Züge kennt (Schach, Dame), andernfalls liegt ein **Spiel mit unvollständiger Information** vor (Bridge,Poker).
Eine **Strategie** ist die Gesamtmenge von Regeln, nach denen sich ein Spieler in Abhängigkeit vom bisherigen Spielverlauf eine bestimmte Alternative auswählt. In Abhängigkeit von der Anzahl der möglichen Strategien (endlich oder unendlich) lassen sich Spiele weiter in **endliche und unendliche Spiele** klassifizieren. Im folgenden werden nur endliche Spiele betrachtet.
Das zentrale Ziel der Spieltheorie ist die Ausarbeitung von Empfehlungen für **optimale Strategien**, das sind Strategien, die den Spielern einen maximal möglichen Gewinn sichern. Dabei wird davon ausgegangen, daß alle Spieler völlig rational handeln und versuchen, ihre Auszahlung zu maximieren.

Die Theorie der Spiele setzt voraus, daß die Auszahlungen immer in Form von intervallskalierten Größen bzw. **kardinalen Nutzenfunktionen** gegeben sind (intervallskalierte bzw. kardinale Funktionen sind eindeutig bis auf positive lineare Transformationen). Die Nutzenfunktionen spiegeln dabei den "Wert" eines bestimmten Ergebnisses für einen Spieler wider. In vielen Fällen kann der Nutzen mit Geldgrößen identifiziert werden, Nutzen und Geld sind aber nicht generell gleichzusetzen (man denke an einen Vater, der mit seinen Kindern um Geldbeträge spielt und für den Verlust von Geldbeträgen einen größern Nutzen haben kann als Gewinn). Auf Nutzenmessung und Nutzentheorie kann im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen werden; es sei verwiesen auf Owen (1971: 130-141).

3. Zwei-Personen-Nullsummenspiele[2)]

Ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel ist gegeben durch eine reellwertige (Auszahlungs-)Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Der Zeilenspieler, Spieler A, wählt eine der Zeilen 1 bis m, der Spaltenspieler, Spieler B, eine der Spalten 1 bis n. Das Ergebnis des Spiels, die Auszahlung a_{ij}, wird bestimmt durch die Wahl der i-ten Zeile von Spieler A und die Wahl der j-ten Spalte von Spieler B. A gewinnt dann von B den Betrag a_{ij}. Da in jeder Partie der Gewinn des einen Spielers der Verlust des anderen ist (Verlust ist negativer Gewinn), die Summe der Auszahlungen also null ist, spricht man von einem Zwei-Personen-Nullsummenspiel.

3.1 Das Minimax-Prinzip

In einem Zwei-Personen-Nullsummenspiel kann sich Spieler A einen bestimmten Betrag sichern. Egal, welche Strategie Spieler B wählt, Spieler A wird auf alle Fälle den kleinsten Betrag $\min_j a_{ij}$ einer beliebigen Zeile i gewinnen. A wird nun - als rationaler Spieler - jene Zeile i wählen, in der dieser Wert maximal wird, so daß der garantierte Minimalgewinn von Spieler A $v_A = \max_i \min_j a_{ij}$ ist.

v_A wird der **kleinste Werte des Spiels** oder **Maximin-Gewinn** genannt, die Strategie, die dieser Zeile entspricht, **Maximin-Strategie**.

Spieler B wird nun bestrebt sein, die Auszahlung a_{ij}, also seinen Verlust, zu minimieren. Wählt er eine Spalte j, so trifft ihn schlimmstenfalls der Verlust $\max_i a_{ij}$, so daß er jene Spalte wählen wird, die diesen Verlust möglichst klein hält. Sein minimaler Verlust ist dann $v_B = \min_j \max_i a_{ij}$,

v_B ist der **größte Wert des Spiels** oder **Minimax-Gewinn**, die entsprechende Spalte die **Minimax-Strategie.** Beide Strategien zusammen werden einfachheitshalber als Minimax-Strategien bezeichnet.

Somit kann Spieler A erzwingen, daß er mindestens den Betrag $\max_i \min_j a_{ij}$ gewinnt, während Spieler B verhindern kann, daß er mehr als $\min_j \max_i a_{ij}$ verliert. In einem Zwei-Personen-Nullsummenspiel gilt also:

(1) $\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$ bzw. $v_A \leq v_B$.

Beispiel: Matrix 1

		B 1	2	3	Zeilenminimum	
	1	2	3	4	2	Maximum der
A	2	-3	4	-5	-5	Zeilenminima
	3	3	-5	6	-5	
Spaltenmaximum		3	4	6		

Minimum der
Spaltenmaxima

In Matrix 1 ist der Maximin-Gewinn $v_A = 2$, der Minimax-Gewinn $v_B = 3$: Spieler A kann also garantieren, daß er 2 gewinnt, Spieler B, daß er nicht mehr als 3 verliert. Die Maximin-Strategie ist 1 (1.Zeile), die Minimax-Strategie ebenfalls 1 (1.Spalte). Handeln beide nach den beschriebenen Strategien, wird A 2 gewinnen, B 2 verlieren.

Wenn wir jetzt davon ausgehen, A erhalte die Information, daß B Spalte 1 wählt, so wird A darauf mit der Wahl von Zeile 3 antworten und seinen Gewinn auf 3 erhöhen. Wenn aber A Strategie 3 wählt, so ist es für B vernünftiger, Spalte 2 zu wählen usw. usw. Durch Informationen über die Aktionen des Gegeners können die oben beschriebenen Strategien also umgestossen und instabil werden.

3.2 Spiele mit Sattelpunkt

Es gibt eine bestimmte Klasse von Spielen, die stabil und determiniert sind, nämlich jene, bei denen der kleinste Wert mit dem größten zusammenfällt:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_i \max_j a_{ij}.$$

In diesem Fall bezeichnen wir den kleinsten Wert v_A und den größten Wert v_B einfach als den **Wert v des Spiels.**

Beispiel: Matrix 2

		B: 1	2	3	4	Zeilenminimum	
	1	-3	1	2	0	-3	
A	2	5	2	3	2	2	← Maximum
	3	2	-3	1	-3	-3	
	4	1	0	-2	2	-2	
Spaltenmaximum		5	2	3	2		
			Minimum		Minimum		

In Matrix 2 gilt für beide Strategienpaare (2,2) und (2,4): $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 2$; der Wert dieses Spiels ist also $v = 2$.

Determinierte Spiele wie das Spiel in Matrix 2 haben nun folgende herausragende Eigenschaft: hält ein Spieler an seiner Minimax-Strategie fest, während der andere davon abweicht, so schneidet der Abweichler niemals besser ab, im günstigsten Fall bleibt sein Gewinn unverändert, in der Regel wird er sich verschlechtern. Hält Spieler B in Ma 2 an einer seiner Minimax-Strategien 2 oder 4 fest, wird sich Spieler A bei einer Abweichung von sein Minimax-Strategie nie verbessern, sondern immer - bis au eine Ausnahme, wo der Gewinn gleich bleibt - verschlechtern. Das Analoge gilt umgekehrt: ändert Spieler B seine Minimax-Strategien, wird sein Verlust immer größer sein.
Es tritt in diesem Fall also eine Gleichgewichtssituation ein und man nennt das entsprechende Element in der Matrix einen **Gleichgewichtspunkt,** die diesem Punkt entsprechende Strategie eine **Gleichgewichtsstrategie.**

Die eben beschriebene Eigenschaft determinierter Spiele beruht auf der Tatsache, daß der Wert dieser Spiele immer in seiner Zeile minimales und in seiner Spalte maximales Element ist. Da in der Geometrie Punkte einer Fläche, die in der einen Achsenrichtung ein Minimum, in der anderen ein Maximum aufweisen, **Sattelpunkte** genannt werden, bezeichnet man das Element einer Matrix mit diesen Eigenschaften auch als Sattelpunkt und vom Spiel sagt man, daß es einen Sattelpunkt hat. Einem Sattelpunkt entspricht dann ein Paar (i^*,j^*) von Minimax-Strategien (es können auch - siehe Matrix 2 - mehrere sein); die Strategien sind optimal und werden als **Lösung des Spiels** bezeichnet. Existieren in einem Spiel mehrere Gleichgewichts- oder Sattelpunkte, so sind die Auszahlungen immer identisch.

Zusammenfassend gilt:

Satz:

(2) **Eine Matrix $A = (a_{ij})$ besitzt einen Sattelpunkt gdw gilt:**

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Der Wert eines Spiels mit Sattelpunkt ist

$$v = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Für Spiele mit Sattelpunkt ergibt sich dann folgender Algorithmus:

(3) **Sei $A = (a_{ij})$ die Auszahlungsmatrix des Spiels.**
1) **Bestimme das Minimum jeder Zeile.**
2) **Bestimme das Maximum der Zeilenminima und die dazugehörigen Zeilen.**
3) **Bestimme das Maximum jeder Spalte.**
4) **Bestimme das Minimum das Spaltenmaxima und die dazugehörigen Spalten.**

Ein Sattelpunkt existiert genau dann, wenn (2) gilt. In diesem Fall sind Zeile i und Spalte j optimale Strategien.

3.3 Spiele ohne Sattelpunkt

Das Spiel in Matrix 1 hatte keinen Sattelpunkt, da der kleinste Wert des Spiels verschieden von dem größten war; tatsächlich haben die wenigsten endlichen Nullsummenspiele einen Sattelpunkt. Es gibt aber auch für Spiele ohne Sattelpunkt eine Lösung, die einen höheren Wert garantiert als den kleinsten Wert v_A des Spiels bzw. einen niedrigeren Wert als den größten Wert v_B.

Wir betrachten hierzu das folgende einfache Spiel "Finger ziehen" mit der Auszahlungsmatrix

Beispiel: Matrix 3

		B: gerade	B: ungerade
A	gerade	-1	1
A	ungerade	1	-1

Die bislang behandelte Minimax-Strategie führt bei diesem Spiel zu keiner Entscheidung für eine bestimmte Strategie. Welche Zeile soll nun von Spieler A gewählt werden?
Wir nehmen zunächst an, daß das Spiel wiederholt gespielt wird. Wählt A dann immer "gerade", so wird B diese Strategie erkennen und dies seinerseits gewinnbringend durch die Wahl von "gerade" ausnutzen; das gleiche gilt, falls A abwechselnd "gerade" und "ungerade" wählt: jede Systematik kann vom Gegner verwertet werden.
Die einzig sichere Methode, um dies zu verhindern, besteht darin, die Entscheidung für "gerade" oder "ungerade" von einem Zufallsexperiment abhängig zu machen.

Man spricht in diesem Fall von einer **gemischten Strategie.** Formal ist eine gemischte Strategie für Spieler A ein Vektor $p = (p_1, p_2, ..., p_m)$ mit

1. $p_i \geq 0$ für $i = 1,2,...,m$ und
2. $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$,

wobei p als Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Zeilen der Matrix interpretiert wird. Spieler A verhält sich dann gemäß der gemischten Strategie $p = (p_1, p_2, ..., p_m)$, wenn p_i die Wahrscheinlichkeit für die Wahl der i-ten Zeile ist.
Analog läßt sich die gemischte Strategie für Spieler B als

Wahrscheinlichkeitsverteilung $q = (q_1,q_2,...,q_n)$ über die Spalten der Matrix einführen, wobei q_j die Wahrscheinlichkeit für die Wahl der j-ten Spalte ist.
Einer gemischten Strategie $p = (p_1,p_2,...,p_m)$ mit $p_k = 1$ und $p_i = 0$ für $i \neq k$ entspräche dann eine reine Strategie k, so daß sich die oben betrachteten Strategien als Spezialfälle gemischter Strategien auffassen lassen.

In Matrix 3 liegt als gemischte Strategie $p = (0.5,0.5)$ nahe, d.h. A wählt mit Wahrscheinlichkeit 0.5 "gerade" und mit Wahrscheinlichkeit 0.5 "ungerade". Jede andere Wahrscheinlichkeitsverteilung könnte von B zu seinem Vorteil genutzt werden, da etwa durch ein $p_1 > 0.5$ B mit "ungerade" seine Gewinnchancen verbessern könnte. Das Analoge gilt umgekehrt.

Formal läßt sich die Wahl von $p = (0.5,0.5)$ (und analog $q = (0.5,0.5)$) folgendermaßen begründen:
Wir nehmen an, A spiele die gemischte Strategie $p = (p_1,p_2)$, B spiele $q = (q_1,q_2)$:

<u>Matrix 3'</u>

		B	
		q_1	q_2
A	p_1	-1	1
	p_2	1	-1

Der durchschnittliche Gewinn von Spieler A (und gleichzeitig der durchschnittliche Verlust von Spieler B) ist definiert über den Erwartungswert (wir bezeichnen im folgenden einfachheitshalber den durchschnittlichen Gewinn als Gewinn):

$$E(p,q) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i \cdot q_j \cdot a_{ij},$$

d.h. Spieler A gewinnt im Mittel

$$E(p,q) = p_1q_1(-1) + p_1q_2(1) + p_2q_1(1) + p_2q_2(-1)$$

$$= q_1(p_2 - p_1) + q_2(p_1 - p_2);$$

mit $p_2 = 1 - p_1$ und $q_2 = 1 - q_1$ gilt:

$$E(p,q) = q_1(1 - 2p_1) + (1 - q_1)(2p_1 - 1).$$

In Matrix 3' ist $(1 - 2p_1)$ der Gewinn von A, falls B immer "gerade" wählt (d.h. $q_1 = 1$; $1 - q_1 = 0$) und $(2p_1 - 1)$ der Gewinn von A, falls B immer "ungerade" wählt. Der minimale Gewinn, den sich A sichern kann, ist somit das Minimum dieses Auszahlungen: $\min\{(1 - 2p_1),(2p_1 - 1)\}$.
Entsprechend ist dann der maximale Verlust für B: $\max\{(1 - 2q_1),(2p_1 - 1)\}$.

Für beliebige Verteilungen p,q gilt somit:

$$\min\{(1 - 2p_1),(2p_1 - 1)\} \leq E(p,q) \leq \max\{(1- 2p_1),(2p_1 -1)\}.$$

Da Spieler A bestrebt ist, seinen Gewinn zu maximieren, muß der Ausdruck $\min\{(1 - 2p_1),(2p_1 - 1)\}$ maximal werden und dies ist genau dann der Fall, wenn $p^* = (0.5,0.5)$; analog muß für Spieler B $\max\{(1 - 2p_1),(2p_1 - 1)\}$ minimal werden und dies gilt genau dann wenn $q^* = (0.5,0.5)$. Der Erwartungswert ist in beiden Fällen 0.

Grafisch läßt sich dies folgendermaßen zeigen:

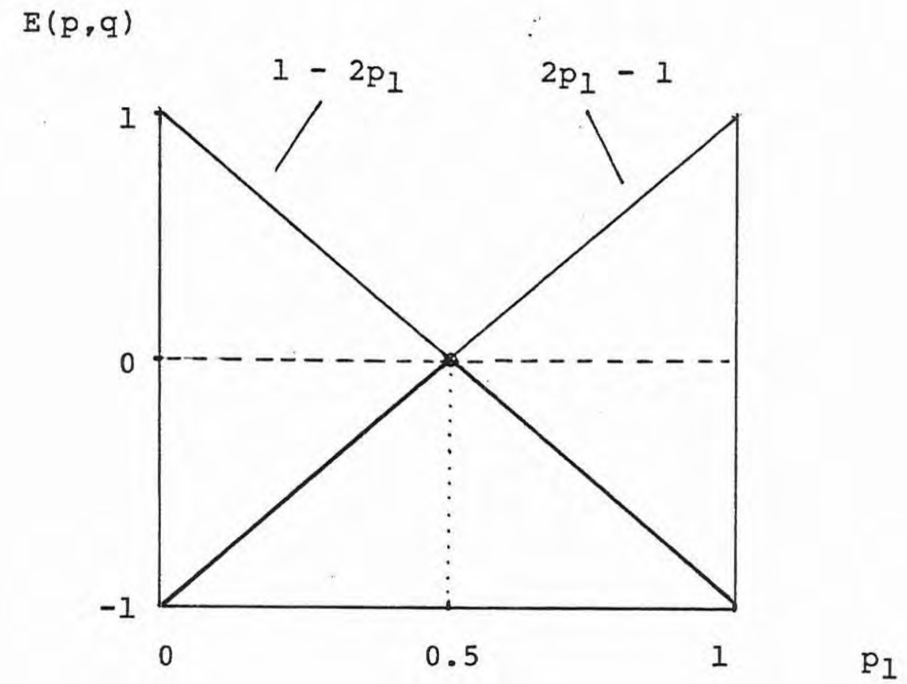


Abb. 2: Mindestgewinn für Spieler A in Abhängigkeit von p

Abb. 2 zeigt den minimalen Gewinn von Spieler A als Funktion der gewählten Wahrscheinlichkeit. Die Funktion $(1-2p_1)$ ist die von links oben nach rechts unten fallende Gerade, die Funktion $(2p_1-1)$ die von links unten nach rechts oben steigende Gerade. Der Minimalgewinn von A - das Minimum der beiden Funktionen - ist dann durch das jeweils unterste Geradenstück gegeben. Der erwartete Gewinn von A ist bei $p_1 = 0$ oder $p_1 = 1$ minimal (-1) und nimmt mit p_1 gegen 0.5 linear zu; das Minimum der beiden Funktionen wird genau an der Stelle $p_1 = 0.5$ maximal.
Die analoge Überlegung für B läßt sich mit dem Maximum der beiden Funktionen durchführen.

Wir verallgemeinern diese Überlegungen zu der 2x2-Matrix auf beliebige mxn-Matrizen:
Sind $p = (p_1,p_2,...,p_m)$ und $q = (q_1,q_2,...,q_n)$ die gemischten Strategien von Spieler A bzw. B, so kann A einen

Mindestgewinn erzwingen, indem er eine gemischte Strategie p^* wählt, so daß

$$\min_q E(p^*,q) = \max_p \min_q E(p,q).$$

Analog kann Spieler B einen minimalen Verlust erzwingen, indem er eine gemischte Strategie q^* wählt, so daß

$$\max_p E(p,q^*) = \min_q \max_p E(p,q).$$

Für das Strategienpaar (p^*,q^*) gilt dann:

$$E(p^*,q^*) \geq \min_q E(p^*,q) = \max_p \min_q E(p,q) \quad \text{und}$$

$$E(p^*,q^*) \leq \max_p E(p,q^*) = \min_q \max_p E(p,q) \quad \text{und somit}$$

$$\max_p \min_q E(p,q) \leq E(p^*,q^*) \leq \min_q \max_p E(p,q).$$

In Analogie zu (1) gilt somit

$$(4) \quad \max_p \min_q E(p,q) \leq \min_q \max_p E(p,q),$$

wobei anstelle der Auszahlungen a_{ij} nun die Erwartungswerte stehen und die Indizes statt über reine über gemischte Strategien laufen.

Wie im Fall der Spiele mit Sattelpunkt, läßt sich Ungleichung (4) nun verschärfen zu

$$\max_p \min_q E(p,q) = \min_p \max_q E(p,q) = E(p^*,q^*).$$

Dies ist der Inhalt des **Hauptsatzes der Spieltheorie (Minimax-Theorem)**:

Sei $A = (a_{ij})$ eine mxn-Matrix und $E(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij}$

Dann existieren die Werte $\max_p \min_q E(p,q)$ **und**

$\min_q \max_p E(p,q)$ **und es gilt:**

$$\max_p \min_q E(p,q) = \min_q \max_p E(p,q).$$

Der Beweis wurde erstmals 1928 von John von Neumann geliefert und findet sich beispielsweise in Owen (1971: 21-26) und Schrage/Baumann (1984: 203-210).

Analog wie bei Sattelpunktspielen heißt das Paar (p^*,q^*) eine **Lösung des Spiels** und $E(p^*,q^*)$ wird als **Wert des Spiels** bezeichnet. Die Strategien p^*,q^* stellen dann auch **optimale Strategien** dar in dem Sinn, daß sie **Gleichgewichtspunkte** liefern, bei denen keine Abweichung zu einem besseren Ergebnis führt: Spieler A kann sicher sein, mindestens $E(p^*,q^*)$ zu erhalten und gleichzeitig ist Spieler B garantiert, nicht mehr als $E(p^*,q^*)$ zu verlieren. Bei Abweichung sind beide der Gefahr ausgesetzt, schlechter abzuschneiden.
Der durch das Minimax-Prinzip garantierte Gewinn v_A für Spieler A kann somit durch die Einführung gemischter Strategien nur verbessert werden - oder schlechtestenfalls gleich bleiben - der minimale Verlust v_B für Spieler B nur verringert werden - oder gleich bleiben.

Das Minimax-Theorem ist ein Existenzsatz, der die Existenz mindestens einer Lösung für Zwei-Personen-Nullsummenspiele garantiert. Die Lösung kann im Bereich der reinen Strategien liegen, wird in der Regel aber zu gemischten Strategien führen. Das Theorem gibt keinen Algorithmus, wie die Lösung gefunden werden kann, aber es gibt Verfahren, wie man zu Lösungen kommen kann.
Zunächst ist zu prüfen, ob das Spiel einen Sattelpunkt hat. Ist die der Fall, so sind die dem Sattelpunkt entsprechenden Strategien optimal. Ist dies nicht der Fall, liegt die

Lösung im Bereich gemischter Strategien.

Der einfachste nicht-triviale Fall ist der eines 2x2-Spiels, also $m=n=2$.
2x2-Spiele lassen sich unter Umständen auch aus größeren Matrizen reduzieren, wenn man "ungünstige" Strategien streicht. Es ist zweckmäßig, hierzu den Dominanzbegriff einzuführen:

Seien i,k beliebige Strategien von A, j,l beliebige Strategien von B, dann gilt:
Zeile i **dominiert** Zeile k gdw $a_{ij} \geq a_{kj}$ für alle j und es ein j gibt, so daß gilt: $a_{ij} > a_{kj}$; formal mit '>>' als Symbol für die Dominanzrelation:
$\forall i,k\colon (i >> k \iff \forall j\colon (a_{ij} \geq a_{kj} \ \& \ \exists j\colon a_{ij} > a_{kj}))$.

Analog für Spalte:
Spalte j dominiert Spalte l gdw $a_{ij} < a_{il}$ für alle i und es ein i gibt so daß gilt; $a_{ij} \leq a_{il}$; formal:
$\forall j,l\colon (j >> l \iff \forall i\colon (a_{ij} < a_{il} \ \& \ \exists i\colon a_{ij} \leq a_{il}))$.

Die grundlegende Rationalitätsregel, das **Dominanzprinzip** oder **Prinzip der sicheren Sache**, besagt, daß keine Strategie gewählt werden darf, die von einer anderen Strategie dominiert wird. Dominiert eine Zeile i eine Zeile k, dann kann k gestrichen werden; das Analoge gilt für Spalte.

Beispiel: Matrix 4

	B			
	1	2	3	4
1	1	-1	0	3
2	0	1	4	2
3	3	0	2	1

Matrix 4'

	B	
	1	2
1	0	1
2	3	0

Spalte 2 dominiert Spalte 4 und Spalte 3, die Spalten 3 und 4 sind zu streichen; sind die Spalten 3 und 4 gestrichen, dann dominiert Zeile 3 Zeile 1, so daß Zeile 1 zu streichen ist und sich Matrix 4' ergibt.

Allgemein gilt: Jede optimale Strategie für die nach dem Dominanzprinzip reduzierte Matrix ist auch optimal für die Originalmatrix (vgl. Owen 1971: 27).

Liegt ein 2x2-Spiel vor, so kann die optimale gemischte Strategie folgendermaßen bestimmt werden:
Die Strategie des Zeilenspielers sei $p = (p_1, p_2)$ mit $p_2 = (1-p_1)$, die des Spaltenspielers $q = (q_1, q_2)$ mit $q_2 = (1-q_1)$. Hält Spieler A an der (noch nicht bestimmten) optimalen Strategie $p^* = (p_1^*, 1-p_1^*)$ fest, kann Spieler B eine beliebige seiner reinen Strategien benutzen ohne den Wert v des Spiels zu verändern.
Wählt Spieler B also Spalte 1, dann gilt:

(5) $p_1^* a_{11} + (1-p_1^*) a_{21} = v$

wählt er Spalte 2, dann gilt:

(6) $p_1^* a_{12} + (1-p_1^*) a_{22} = v$

also:

$$p_1^* a_{11} + (1-p_1^*) a_{21} = p_1^* a_{12} + (1-p_1^*) a_{22}$$

und somit:

(7) $p_1^* = (a_{22} - a_{21}) / (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})$ und

(8) $p_2^* = 1-p_1^* = (a_{11} - a_{12}) / (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})$

v ergibt sich dann durch (7)/(8) eingesetzt in (5)/(6):

(9) $v = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) / (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})$.

Ist der Wert v des Spiels bekannt, dann genügt zur Bestimmung der optimalen Strategie des Gegners eine Gleichung z.B.

$$q_1^* a_{11} + (1-q_1^*) a_{12} = v$$

und wir erhalten:

(10) $q_1^* = (a_{22} - a_{12}) \,/\, (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})$ bzw.

(11) $q_2^* = (1-q_1^*) = (a_{11} - a_{21}) / \, (a_{11} + a_{12} - a_{12} - a_{21})$.

Es läßt sich beweisen, daß im Fall $a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21} = 0$ die Matrix einen Sattelpunkt besitzt (vgl. Baumann/Schrage 1984: 148-149).

Beispiel:
Die Lösung von Matrix 3 mit (8)-(11) ermittelt ergibt:

$$p_1^* = (-1-1) \,/\, (-1-1-1-1) = 0.5$$

$$p_2^* = 1 - p_1^* = 0.5$$

also $p^* = (0.5,0.5)$ und

$v = ((-1)(-1)-1) \,/\, (-4) = 0$ und somit

$$q_1^* = (-1-1) \,/\, (-4) = 0.5$$

$q_2^* = 1 - q_1^* = 0.5$ also

$$q^* = (0.5,0.5)$$

Der nächste nicht-triviale Fall von Lösungsmethoden betrifft 2xn- (n>2) bzw. mx2-Spiele (m>2). Spiele dieser Art lassen sich leicht grafisch lösen; dieser Fall soll hier nicht behandelt werden; es sei verwiesen auf Wentzel (1976: 33-43).

Wir wollen uns nun dem allgemeinen Fall eines mxn-Spiels mit m,n > 2 zuwenden.
Die Lösung dieser Spiele ist eine relativ komplizierte Aufgabe, deren Komplexheit mit größer werdendem m,n anwächst. Zunächst kann man wieder davon ausgehen, daß bei Festhalten von Spieler A an der optimalen Strategie p^* der Gewinn größer/gleich v ist. Wir setzen nun voraus, daß $v > 0$; dies ist dann der Fall, wenn keine negativen Elemente in der Matrix sind, was dadurch erreicht werden kann ,daß zu allen Matrixelementen eine positive Zahl hinzuaddiert wird. Die Allgemeingültigkeit wird dadurch nicht beschränkt: die optimale Lösung bleibt invariant bei positiven Transformationen, der Wert v wird um die positive Zahl erhöht.

Für Spieler A gilt dann das folgende System linearer Gleichungen:

$$
\begin{array}{lllllll}
p_1^* a_{11} & + p_2^* a_{21} & + p_3^* a_{31} & + & \dots & + p_m^* a_{m1} & \geq v \\
p_1^* a_{12} & + p_2^* a_{22} & + p_3^* a_{32} & + & \dots & + p_m^* a_{m2} & \geq v \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\
p_1^* a_{1n} & + p_2^* a_{2n} & + p_3^* a_{3n} & + & \dots & + p_m^* a_{mn} & \geq v
\end{array}
$$

Spieler B wird seine optimale Strategie q* so bestimmen, daß sein Verlust immer kleiner bzw. bei Vorliegen der optimalen Strategie p^* von A gleich dem Wert v ist, so daß für B also das Gleichungssystem lautet:

$$
\begin{array}{lllllll}
q_1^* a_{11} & + q_2^* a_{12} & + p_3^* a_{13} & + & \dots & + q_n^* a_{1n} & \leq v \\
q_2^* a_{21} & + q_2^* a_{22} & + q_3^* a_{23} & + & \dots & + q_n^* a_{2n} & \leq v \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\
q_1^* a_{m1} & + q_2^* a_{m2} & + q_3^* a_{m3} & + & \dots & q_n^* a_{mn} & \leq v
\end{array}
$$

Die Lösung solcher linearer Gleichungssysteme geschieht in der Theorie der linearen Optimierung. Sie kann relativ komplex ausfallen und sich bei sehr umfangreicher Rechenarbeit als unmöglich erweisen (Wentzel 1976: 43).

Für praktische Zwecke ist es oft nicht notwendig, die genaue Lösung zu bestimmen: es genügt, eine Näherungslösung zu finden, die den Wert des Spiels und die optimalen Strategien annähert.
Da v zwischen dem kleinsten und größten Wert des Spiels liegen muß, kann eine annehmbare Lösung mit Hilfe numerischer Methoden ermittelt werden. Die Annäherung an den wahren Wert v geschieht mit einem Iterationsverfahren, das erstmals von G.C. Brown (1951) angegeben wurde, und das man als "Lernen am Erfolg" bezeichnen könnte.
Bei einem iterierten Spiel wird jeder Spieler versuchen, die Strategie des Gegners zu erkennen und danach die für ihn günstigste Wahl zu treffen. Die Näherungslösung beruht auf der Idee, die Häufigkeit der gewählten reinen Strategien des Gegners bis zum k-ten Spiel zu zählen; sodann wird diejenige reine Strategie gewählt, die den maximalen Gewinn erwarten läßt unter der Annahme, der Gegner spiele die Spiele k+1, k+2,... so weiter wie bisher.
Wählt A also etwa beim 1. Spiel Zeile i, so antwortet B mit der für A ungünstigsten Strategie j. A antwortet daraufhin mit einer Strategie l, die einen maximalen mittleren Gewinn bei Vorliegen der gegnerischen Strategie j liefert usw. usw. In jedem Spiel antworten die Spieler also mit einer Strategie, die optimal bezüglich der vorhergehenden Züge ist.
Wenn dieser Prozeß hinreichend lange fortgesetzt wird, strebt der mittlere Gewinn gegen den Wert v des Spiels und die relativen Häufigkeiten der gewählten Strategien streben gegen die Wahrscheinlichkeiten der optimalen Strategien.[3)]

Zur Verdeutlichung sei noch einmal Matrix 1 (kein Sattelpunkt) mit einer Tabelle für die ersten fünf Iterationsschritte betrachtet:

Matrix 1:

		B		
		1	2	3
	1	2	3	4
A	2	-3	4	-5
	3	3	-5	6

Tabelle 1: Die ersten fünf Iterationsschritte für Matrix 1

k	Strat		ZH			ZS			SH			SS			$\underline{v}$	$\overline{v}$	v
	A	B	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3			
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	$\underline{2}$	3	4	1	0	0	2	-3	$\overline{3}$	2	3	2.5
2	3	1	1	0	1	5	$\underline{-2}$	10	2	0	0	4	-6	$\overline{6}$	-1	3	1
3	3	2	1	0	2	8	$\underline{-7}$	16	2	1	0	$\overline{7}$	-2	1	-2.3	2.3	0
4	1	2	2	0	2	10	$\underline{-4}$	20	2	2	0	$\overline{10}$	2	-4	-1	2.5	0.8
5	1	2	3	0	2	12	$\underline{-1}$	24	2	3	0	$\overline{13}$	6	-9	-0.2	2.6	0.5

In der ersten Spalte steht die Nummer k des Iterationsschritts (des k-ten Spiels), in der zweiten die von Spieler A und B gewählten Strategien, in der 3. Spalte ZH die Häufigkeit, mit der jede Zeile bis zum k-ten Spiel gewählt wurde (ZH: Zeilenhäufigkeit), in der 4. Spalte die Summe der Zeilenvektoren, das ist der angehäufte Gewinn nach den ersten k-Spielen (der minimale Gewinn ist unterstrichen). In der 5. und 6. Spalte sind die entsprechenden Daten von Spieler B aufgelistet: in der 5. die Häufigkeit, mit der jede Spalte bislang von B gewählt wurde (SH: Spaltenhäufigkeit) und in der 6. die Summe der Spaltenvektoren (Maximum überstrichen). In der letzten Spalte steht schließlich der minimale mittlere Gewinn $\underline{v} = v_{k_{min}}/k$ (also der minimale angehäufte Gewinn geteilt durch die Anzahl der Spiele), der maximale mittlere Gewinn $\overline{v} = v_{k_{max}}/k$ und ihr arithmetisches Mittel $v^* = (\underline{v} + \overline{v})/2$.

Beim 1. Spiel wählt Spieler A Zeile 1, Spieler B Spalte 1, die summierten Vektoren sind für A (2,3,4), für B (2,-3,3). Beim zweiten Spiel weiß A, daß B Spalte 1 gewählt hat; er muß somit unter dieser Voraussetzung Zeile 3 wählen; Spieler B weiß, daß A Zeile 1 gewählt hat, er muß unter dieser Vorausetzung bei Spalte 1 bleiben; Spieler A hat also bis zum 2. Spiel einmal Zeile 1 und Zeile 3 gewählt (3. Spalte der Tabelle), Spieler B zweimal Spalte 1 (5. Spalte der Tabelle). Addiert man den Zeilenvektor zu dem des letzten Spiels, so erhält man die Zahlen in der 5. Spalte bzw. im Fall des Spaltenvektors die Zahlen in der 6. Spalte der Tabelle.
Der minimale mittlere Gewinn $\underline{v}$ ist dann -2/2 = -1, der maximale 6/2 = 3 usw.usw.
Nach der Tabelle mit 5 Iterationsschritten liegt der Wert v des Spiels zwischen -0.2 und 2.6; das Intervall ist natürlich noch sehr groß aber die Zahl der Iterationsschritte auch noch sehr klein.
Die k-te Näherung an eine optimale Strategie läßt sich dadurch feststellen, daß man die relativen Häufigkeiten der ersten k Partien berechnet (hierzu wurden die Spalten ZH und SH eingeführt), so daß sich für Matrix 1 für k= 5 ergibt:
$p^* = (3/5,0,2/5)$ und $q^* = (2/5,3/5,0)$

Für eine genauere Bestimmung reichen 5 Iterationsschritte nicht aus; da der Rechenaufwand mit der Zahl k der Iterationsschritte immens zunimmt, bietet sich natürlich die Lösung mit einem Computerprogramm an.
Das im Anhang aufgelistete (Turbo-)Pascal Programm ist eine Erweiterung eines Programms aus Schrage/Baumann (1984: 164) und errechnet die k-te Näherung an eine optimale Strategie sowie den Wert v des Spiels in Form der obigen Tabelle (die 2. und letzte Spalte der obigen Tabelle wurden weggelassen). Der Benutzer gibt die Anzahl der Zeilen und Spalten ein - maximal jeweils 10 - und anschließend zeilenweise die

Matrix und die Zahl der Iterationsschritte.

Der folgende Ausdruck zeigt das Ergebnis für k = 50:

0:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1:	1	0	0	2	3	4	1	0	0	2	-3	3
2:	1	0	1	5	-2	10	2	0	0	4	-6	6
3:	1	0	2	8	-7	16	2	1	0	7	-2	1
4:	2	0	2	10	-4	20	2	2	0	10	2	-4
5:	3	0	2	12	-1	24	2	3	0	13	6	-9
6:	4	0	2	14	2	28	2	4	0	16	10	-14
7:	5	0	2	16	5	32	2	5	0	19	14	-19
8:	6	0	2	18	8	36	2	6	0	22	18	-24
9:	7	0	2	20	11	40	2	7	0	25	22	-29
10:	8	0	2	22	14	44	2	8	0	28	26	-34
11:	9	0	2	24	17	48	2	9	0	31	30	-39
12:	10	0	2	26	20	52	2	10	0	34	34	-44
13:	11	0	2	28	23	56	2	11	0	37	38	-49
14:	11	1	2	25	27	51	2	12	0	40	42	-54
15:	11	2	2	22	31	46	3	12	0	42	39	-51
16:	12	2	2	24	34	50	4	12	0	44	36	-48
17:	13	2	2	26	37	54	5	12	0	46	33	-45
18:	14	2	2	28	40	58	6	12	0	48	30	-42
19:	15	2	2	30	43	62	7	12	0	50	27	-39
20:	16	2	2	32	46	66	8	12	0	52	24	-36
21:	17	2	2	34	49	70	9	12	0	54	21	-33
22:	18	2	2	36	52	74	10	12	0	56	18	-30
23:	19	2	2	38	55	78	11	12	0	58	15	-27
24:	20	2	2	40	58	82	12	12	0	60	12	-24
25:	21	2	2	42	61	86	13	12	0	62	9	-21
26:	22	2	2	44	64	90	14	12	0	64	6	-18
27:	23	2	2	46	67	94	15	12	0	66	3	-15
28:	24	2	2	48	70	98	16	12	0	68	0	-12
29:	25	2	2	50	73	102	17	12	0	70	-3	-9
30:	26	2	2	52	76	106	18	12	0	72	-6	-6
31:	27	2	2	54	79	110	19	12	0	74	-9	-3
32:	28	2	2	56	82	114	20	12	0	76	-12	0
33:	29	2	2	58	85	118	21	12	0	78	-15	3
34:	30	2	2	60	88	122	22	12	0	80	-18	6
35:	31	2	2	62	91	126	23	12	0	82	-21	9
36:	32	2	2	64	94	130	24	12	0	84	-24	12
37:	33	2	2	66	97	134	25	12	0	86	-27	15
38:	34	2	2	68	100	138	26	12	0	88	-30	18
39:	35	2	2	70	103	142	27	12	0	90	-33	21
40:	36	2	2	72	106	146	28	12	0	92	-36	24
41:	37	2	2	74	109	150	29	12	0	94	-39	27
42:	38	2	2	76	112	154	30	12	0	96	-42	30
43:	39	2	2	78	115	158	31	12	0	98	-45	33
44:	40	2	2	80	118	162	32	12	0	100	-48	36
45:	41	2	2	82	121	166	33	12	0	102	-51	39
46:	42	2	2	84	124	170	34	12	0	104	-54	42
47:	43	2	2	86	127	174	35	12	0	106	-57	45
48:	44	2	2	88	130	178	36	12	0	108	-60	48
49:	45	2	2	90	133	182	37	12	0	110	-63	51
50:	46	2	2	92	136	186	38	12	0	112	-66	54

Optimale Loesung Zeile: (0.92,0.04,0.04,)
Optimale Loesung Spalte: (0.76,0.24,0.00,)

Wert des Spiels: 1.84 ≤ v ≤ 2.24

Demnach hat Spieler A Zeile 1 in 92 und die Zeilen 2 und 3 in je 4 von 100 Fällen zu wählen; Spieler B wählt die 1. Spalte in 76 und die 2. Spalte in 24 von 100 Fällen (die 3. Spalte darf nie gewählt werden). Der Wert v liegt zwischen 1.84 und 2.24, d.h. Spieler A wird im Mittel gewinnen.

Für k = 100 erhält man die noch genauere Lösung:

$p^* = (0.96, 0.02.0.02);$
$q^* = (0.88, 0.12, 0.00);$
$1.92 \leq v \leq 2.12$

Abschließend sei das Programm noch einmal mit dem Spiel "Papier, Stein, Schere" demonstriert. Die Auszahlungsmatrix ist

Matrix 5

			B		
			Papier	Stein	Schere
			1	2	3
	Papier	1	0	1	-1
A	Stein	2	-1	0	1
	Schere	3	1	-1	0

Es ist intuitiv klar, daß jeder Spieler seine Strategien mit Wahrscheinlichkeit 1/3 spielen muß und der Wert des Spiels null ist.

Das Programm liefert die Tabelle mit den folgenden Werten für k = 50:

0:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1:	1	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	-1	1
2:	1	0	1	1	0	-1	1	0	1	-1	0	1
3:	1	0	2	2	-1	-1	1	0	2	-2	1	1
4:	1	1	2	1	-1	0	1	1	2	-1	1	0
5:	1	2	2	0	-1	1	1	2	2	0	1	-1
6:	1	3	2	-1	-1	2	1	3	2	1	1	-2
7:	2	3	2	-1	0	1	2	3	2	1	0	-1
8:	3	3	2	-1	1	0	3	3	2	1	-1	0
9:	4	3	2	-1	2	-1	4	3	2	1	-2	1
10:	5	3	2	-1	3	-2	5	3	2	1	-3	2
11:	5	3	3	0	2	-2	5	3	3	0	-2	2
12:	5	3	4	1	1	-2	5	3	4	-1	-1	2
13:	5	3	5	2	0	-2	5	3	5	-2	0	2
14:	5	3	6	3	-1	-2	5	3	6	-3	1	2
15:	5	3	7	4	-2	-2	5	3	7	-4	2	2
16:	5	4	7	3	-2	-1	5	4	7	-3	2	1
17:	5	5	7	2	-2	0	5	5	7	-2	2	0
18:	5	6	7	1	-2	1	5	6	7	-1	2	-1
19:	5	7	7	0	-2	2	5	7	7	0	2	-2
20:	5	8	7	-1	-2	3	5	8	7	1	2	-3
21:	5	9	7	-2	-2	4	5	9	7	2	2	-4
22:	6	9	7	-2	-1	3	6	9	7	2	1	-3
23:	7	9	7	-2	0	2	7	9	7	2	0	-2
24:	8	9	7	-2	1	1	8	9	7	2	-1	-1
25:	9	9	7	-2	2	0	9	9	7	2	-2	0
26:	10	9	7	-2	3	-1	10	9	7	2	-3	1
27:	11	9	7	-2	4	-2	11	9	7	2	-4	2
28:	12	9	7	-2	5	-3	12	9	7	2	-5	3
29:	12	9	8	-1	4	-3	12	9	8	1	-4	3
30:	12	9	9	0	3	-3	12	9	9	0	-3	3
31:	12	9	10	1	2	-3	12	9	10	-1	-2	3
32:	12	9	11	2	1	-3	12	9	11	-2	-1	3
33:	12	9	12	3	0	-3	12	9	12	-3	0	3
34:	12	9	13	4	-1	-3	12	9	13	-4	1	3
35:	12	9	14	5	-2	-3	12	9	14	-5	2	3
36:	12	9	15	6	-3	-3	12	9	15	-6	3	3
37:	12	10	15	5	-3	-2	12	10	15	-5	3	2
38:	12	11	15	4	-3	-1	12	11	15	-4	3	1
39:	12	12	15	3	-3	0	12	12	15	-3	3	0
40:	12	13	15	2	-3	1	12	13	15	-2	3	-1
41:	12	14	15	1	-3	2	12	14	15	-1	3	-2
42:	12	15	15	0	-3	3	12	15	15	0	3	-3
43:	12	16	15	-1	-3	4	12	16	15	1	3	-4
44:	12	17	15	-2	-3	5	12	17	15	2	3	-5
45:	12	18	15	-3	-3	6	12	18	15	3	3	-6
46:	13	18	15	-3	-2	5	13	18	15	3	2	-5
47:	14	18	15	-3	-1	4	14	18	15	3	1	-4
48:	15	18	15	-3	0	3	15	18	15	3	0	-3
49:	16	18	15	-3	1	2	16	18	15	3	-1	-2
50:	17	18	15	-3	2	1	17	18	15	3	-2	-1

Optimale Loesung Zeile: (0.34,0.36,0.30,)
Optimale Loesung Spalte: (0.34,0.36,0.30,)

Wert des Spiels: $-0.06 \leq v \leq 0.06$

Die angenäherte optimale Lösung ist für $k = 50$ schon ziemlich genau.

Für $k = 100$ lauten die Werte:

$p^* = (0.35, 0.30, 0.35)$

$q^* = (0.35, 0.30, 0.35)$

$-0.05 \leq v \leq 0.05$,

für $k = 200$:

$p^* = (0.35, 0.32, 0.34)$

$q^* = (0.35, 0.32, 0.34)$

$-0.04 \leq v \leq 0.04$

4. Zwei-Personen-Nichtnullsummenspiele

In Zwei-Personen-Nullsummenspielen sind die Interessen der Spieler immer entgegengesetzt: der Gewinn des einen ist stets der Verlust des anderen. In den meisten realen Situationen ist dies aber nicht der Fall: häufig können beide Spieler gewinnen, wenn sie miteinander kooperieren oder ein Spieler kann mehr gewinnen als der andere verliert etc.

In Spielen dieser Art ist die Summe der Gewinne also verschieden von null und man bezeichnet sie deshalb als Nichtnullsummenspiele.

Zwei-Personen-Nichtnullsummenspiele können formal als mxn-Matrix (A,B) der Paare (a_{ij},b_{ij}) dargestellt werden; die Elemente a_{ij} und b_{ij} sind Auszahlungen an Spieler A bzw. B, wenn diese ihre i-te bzw. j-te Strategie wählen (man bezeichnet diese Spiele deshalb auch als Bimatrixspiele):

$$\begin{pmatrix} (a_{11},b_{11}) & (a_{12},b_{12}) & \dots & (a_{1n},b_{1n}) \\ (a_{21},b_{21}) & (a_{22},b_{22}) & \dots & (a_{2n},b_{2n}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_{m1},b_{m1}) & (a_{m2},b_{m2}) & \dots & (a_{mn},b_{mn}) \end{pmatrix}$$

Wählt Spieler A die 1. Zeile, Spieler B die 1. Spalte, so erhält A die Auszahlung a_{11}, B die Auszahlung b_{11}.

Man kann erkennen, daß Bimatrixspiele im Fall $a_{ij} = - b_{ij}$ (für alle i,j) in Nullsummenspiele übergehen; Nullsummenspiele sind also Spezialfälle von Bimatrixspielen.

Die Bestimmung von Lösungskonzepten für Zwei-Personen-Nichtnullsummenspielen baut auf drei Begriffen auf, wovon zwei bereits eingeführt sind:

1) Dominanzprinzip,
2) Gleichgewichtsstrategie/-punkt,
3) Pareto-Optimalität.

Ein **pareto-optimales Ergebnis** (kurz: Pareto-Optimum)liegt dann vor, wenn es kein anderes Ergebnis des Spiels gibt, bei dem **jeder** Spieler eine höhere Auszahlung erhält. Mit i,k als Zeilenindizes, j,l als Spaltenindizes läöt sich das Pareto-Optimum formal definieren:

(a_{ij},b_{ij}) ist Pareto-Optimum $\Leftrightarrow \neg\exists k,l: (a_{kl} > a_{ij}\ \&\ b_{kl} > b_{ij})$.

Das **Dominanzprinzip** ist das grundlegende Prinzip, denn eine dominierte Strategie ist niemals optimal: dominiert eine Strategie i eine Strategie k, so darf auf keinen Fall k gewählt werden, weil kein Ergebnis unter k besser ist als unter i (vgl. oben).

Eine **Gleichgewichtsstrategie** war dadurch bestimmt, daß kein Spieler bei Abweichung ein besseres Ergebnis erzielen kann, wenn der andere genauso handelt. Der diesen Strategien entsprechende Punkt hieß Gleichgewichtspunkt.

Bei Nichtnullsummenspielen gilt nun folgendes Theorem (J.Nash):
Jedes Nichtnullsummenspiel besitzt mindestens einen Gleichgewichtspunkt (zum Beweis vgl. Owen 1971: 143-144).

Zwei-Personen-Nichtnullsummenspiele zerfallen in zwei Klassen, die gesondert behandelt werden: kooperative und nicht-kooperative (vgl. das eingangs vorgestellte Baumdiagramm).

4.1 Kooperative Zwei-Personen-Nichtnullsummenspiele

Kooperative Spiele haben die Eigenschaft, daß feste, bindende Abmachungen zwischen den Spielern getroffen werden können und sie ihre reinen oder gemischten Strategien aufeinander abstimmen können. Aufgabe einer normativen Theorie kooperativer Spiele ist es, eine Lösung auf die Frage zu finden, auf welche gemeinsamen Strategien - und damit auf welche Auszahlungen - sich beide Spieler durch Verhandlungen einigen sollten. Gewöhnlich erhält ein Spieler weniger als der andere; das muß aber nicht sein wie etwa in der folgenden Matrix (um in Einklang mit der Literatur zu bleiben werden Zeilen und Spalten nun statt mit 1,2,... mit A_1, A_2,... bzw. B_1, B_2,... bezeichnet):

Beispiel: Matrix 6

		B	
		B_1	B_2
A	A_1	(1, 1)	(0, 0)
	A_2	(0, 0)	(1, 1)

Es liegen keine dominierten Strategien vor: wählt A nämlich A_1, dann ist zwar $1 > 0$ bei Wahl von Spalte B_1, aber nicht $0 > 1$ bei Wahl von B_2. Das Analoge gilt für den Spaltenspieler B. Die Strategienpaare (A_1,B_1) und (A_2,B_2) liefern aber Gleichgewichtspunkte - da in diesen Punkten die Spieler bei Abweichung schlechter abschneiden, wenn der Gegner nicht abweicht - und gleichzeitig die beiden paretooptimalen Ergebnisse.

Im kooperativen Fall, wenn Verhandlungen und Übereinkünfte möglich sind, ist die Lösung dieses Spiels kein Problem: da kein Spieler Grund hat, irgendeine Strategie zu bevorzugen, müssen sie sich lediglich auf (A_1,B_1) oder (A_2,B_2) abstimmen.

In realen Situationen ist die Lösung solcher Koordinationsprobleme beispielsweise aber dann nicht trivial, wenn keine Kommunikationsmöglichkeit gegeben ist. Solche Situationen liegen etwa dann vor, wenn zwei Personen sich zu einem bestimmten Zeitpunkt in einer Stadt treffen wollen, ohne einen Treffpunkt abgemacht zu haben, ein unterbrochenes Telefongespräch wiederhergestellt werden soll oder die Kollision von zwei Fahrzeugen vermieden werden soll. All dieses Situationen haben gemeinsam, daß beide Spieler nur dann "gewinnen", wenn beide die kooperative Strategie wählen: im ersten Beispiel müssen beide den gleichen Treffpunkt wählen, im zweiten darf nur einer anrufen, der andere nicht und im dritten sollte jeder auf einer anderen Seite fahren. Die "Lösung" solcher Koordinationsspiele ohne Kommunikation kann durch soziale Normen, Konventionen, oder Regeln sichergestellt werden, die die Einhaltung der für beide Seiten gewinnbringenden Aktion gewährleisten (zur Vermeidung der Kollision dienen z.B. Straßenverkehrsregeln).

Eine andere Situation ist mit folgender Matrix gegeben

Beispiel: Matrix 7

		B		
		B_1	B_2	B_3
	A_1	(6, 4)	(0, 0)	(0, 0)
A	A_2	(0, 0)	(4, 6)	(0, 0)
	A_3	(0, 0)	(0, 0)	(2, 3)

Auch diese Matrix besitzt keine dominierten Strategien, aber drei Gleichgewichtspunkte in der Diagonale der Matrix. In diesem Fall haben aber alle drei Punkte einen unterschiedlichen Status. Spieler A hat die Präferenzrangfolge (A_1,B_1) vor (A_2,B_2) vor (A_3,B_3) während B die Präferenzrangfolge (A_2,B_2) vor (A_1,B_1) vor (A_3,B_3) hat.
Die beiden pareto-optimalen Ergebnisse sind (A_1,B_1) und (A_2,B_2), so daß für beide Spieler das vernünftigste ist, eines der beiden Ergebnisse anzustreben: bei allen anderen Ergebnissen schneiden beide Spieler schlechter ab. Da bei jedem der beiden pareto-optimalen Ergebnisse einer der beiden Spieler benachteiligt ist, erscheint eine gemischte Strategie am besten, bei der - iteriert gespielt - in 50% der Fälle das Ergebnis (6,4) und in 50% das Ergebnis (4,6)

erzeugt wird; beide Spieler erhalten dann im Mittel die Auszahlung (5,5).

Wir wollen nun eine Lösungsmethode von Nash vorstellen für Zwei-Personen-Nullsummenspiele und zeigen, daß genau dieses Ergebnis geliefert wird.
Die Lösung von Nash wird aus den folgenden Axiomen abgeleitet; wir geben die Axiome informell in Anlehnung an Rapoport (1980: 290):

A1: Symmetrie: Die Lösung des Spiels sollte nicht von der Bezeichnung der Spieler abhängen.
A2: Linearität: Die probabilistische Mischung der Ergebnisse, die die Lösung darstellen, sollte gegenüber unabhängigen positiven linearen Transformationen der Auszahlungen invariant sein.
A3: Pareto-Optimalität: Die Lösung sollte pareto-optimal sein.
A4: Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen: Falls bei gleich bleibendem Drohpunkt (siehe unten) die keine Lösung enthaltenden erreichbaren Ergebnisse gestrichen werden, sollte die Lösung gleich bleiben.

Es läßt sich beweisen, daß nur eine einzige Mischung von Ergebnissen alle Axiome erfüllt, nämlich diejenige, die das "Nash-Produkt" $(a-a_0)(b-b_0)$ maximiert (zum Beweis vgl. Owen 1971: 147). a,b sind dabei die Auszahlungen an A bzw. B (Indizes werden im folgenden weggelassen) und (a_0,b_0) ist der sog. **Drohpunkt** von A und B. Ein Drohpunkt ist das Ergebnis der Drohstrategien beider Spieler, die die Spieler dann zu spielen beabsichtigen, wenn es in dem Verhandlungsspiel zu keiner Einigung kommt. Jeder Spieler wählt seine Drohstrategie so, daß die entsprechende Lösung seine Auszahlung maximieren würde. In Matrix 7 ist die Drohstrategie für A A_1, die von B B_2, das Ergebnis ist der Drohpunkt (A_1,B_2) mit dem Auszahlungsvektor (0,0).
Zur Bestimmung der Nash-Lösung werden alle möglichen Auszahlungen als Punkte in ein Koordinatensystem

eingetragen, wobei die Auszahlungen für A auf der x-Achse die für B auf der y-Achse abgetragen werden:

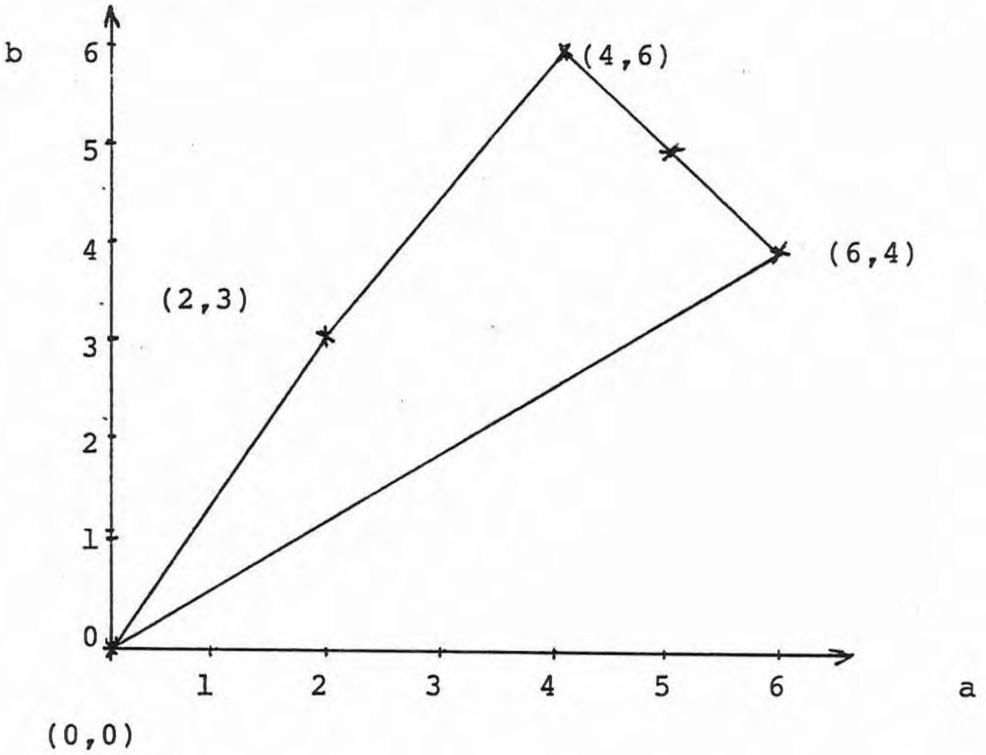
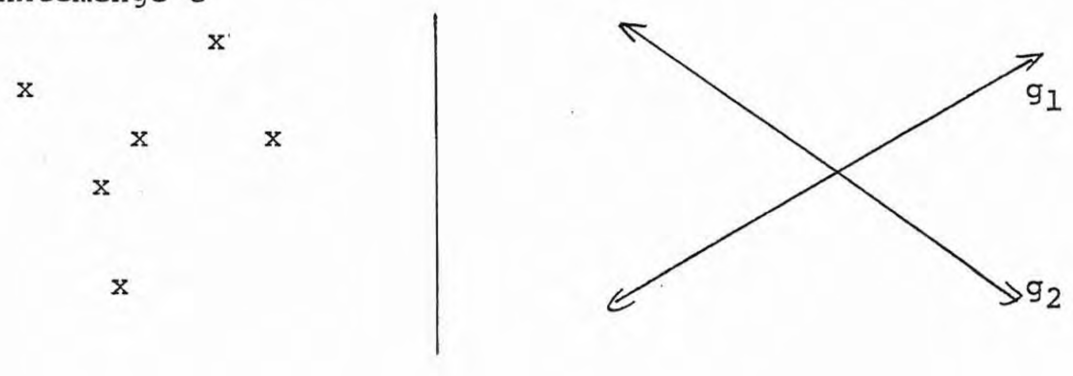


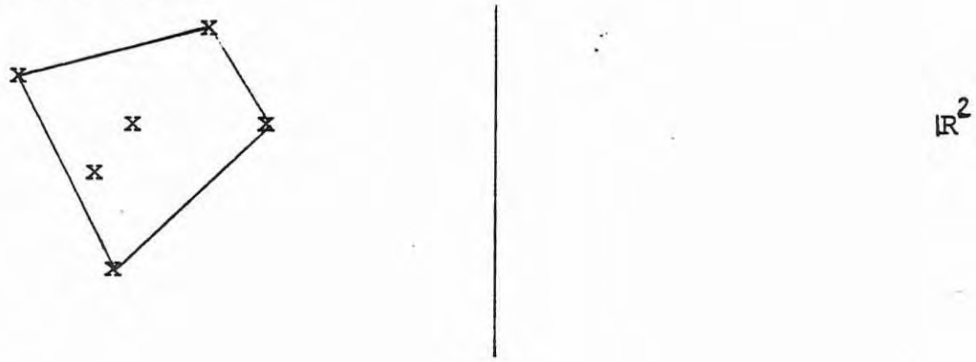
Abb. 3: Ergebnismenge, konvexe Hülle und Lösung von Matrix 7

Die Punkte werden dann in eine **konvexe Hülle** eingeschlossen. Die konvexe Hülle einer Punktemenge G ist der kleinste konvexe Körper, der G enthält, wobei der kleinste konvexe Körper K diejenige Menge ist, für die gilt: liegen die Punkte x,y in K, dann liegt auch die Verbindungsstrecke (=konvexe Linearkombination) in K. Zur Verdeutlichung drei Beispiele konvexer Hüllen:

Punktemenge G



Konvexe Hülle



Im Koordinatensystem ist die konvexe Hülle das Dreieck mit den Koordinaten (0,0),(6,4),(4,6),(2,3). Jeder Punkt einer konvexen Hülle, der nicht mit diesen Punkten identisch ist, kann als Auszahlungspaar realisiert werden, das durch gemischte Strategien erreicht wird.
Die Lösung des Spiels muß auf der Geraden liegen, die die Punkte (6,4) und (4,6) verbindet, da nur hier alle pareto-optimalen Ergebnisse liegen: hat sich einer der Spieler auf einen dieser Punkte festgelegt, gibt es nämlich keine Möglichkeit mehr, beide Auszahlungen gleichzeitig zu verbessern. Nach dem Theorem von Nash, liegt die Lösung auf dieser Geraden genau dort, wo das Nash-Produkt $(a-a_0)(b-b_0)$ maximiert wird. Drückt man die Gleichung für diese Gerade in Abhängigkeit von a aus, so ergibt sich:

$b(a) = 10 - a.$

Mit dem Drohpunkt $(a_0,b_0) = (0,0)$ und dem Nash-Produkt erhält man somit:

$(a-0)(10-a-0) = 10a - a^2.$

Die Maximierung ergibt sich durch Nullsetzen der 1. Ableitung nach a:

$d(10a-a_2)/da = 0 = 10-2a$ und somit

$a = 5;\ b=5$

(ein Maximum liegt vor, da die 2. Ableitung < 0).

Das Ergebnis der Nash-Lösung ist der Auszahlungsvektor (5,5), der auf der Geraden genau in der Mitte liegt zwischen den beiden reinen pareto-optimalen Punkten. Die Mischung der zwei pareto-optimalen Ergebnisse, die dieses Ergebnis erzeugt, ist (A_1,B_1) und (A_2,B_2) jeweils mit Wahrscheinlichkeit 50% zu spielen bzw. im iterierten Spiel in 50% der Fälle das eine und in 50% der Fälle das andere Ergebnis zu erzeugen. Sie ergibt sich grafisch durch den Streckenanteil zwischen den Punkten (4,6 und (6,4), in diesem Fall genau 50%.

Neben dem Lösungskonzept von Nash für kooperative Zwei-Personenspiele existieren noch andere Lösungsvorschläge von Raiffa, Shapley und Braithwaite, auf die in diesem Rahmen nicht mehr eingegangen werden soll. Ein Vergleich dieser Lösungsvorschläge findet sich in Rapoport (1966: 94-122).

4.2 Nicht-kooperative Nichtnullsummenspiele

Nicht-kooperative Spiele sind dadurch charakterisiert, daß es keine bindenden Absprachen über die Wahl bestimmter Strategien gibt und die Spieler ihre Strategien unabhängig voneinander wählen.
Die Probleme bei der Lösung nicht-kooperativer Spiele seien anhand von zwei Beispielen dargestellt.
Das folgende Spiel wird unter dem Namen "Chicken" in der Literatur aufgeführt (vgl. z.B. Rapoport 1966: 137):

Beispiel: Matrix 8

		B	
		B_1	B_2
A	A_1	(1, 1)	(-2, 2)
	A_2	(2, -2)	(-5, -5)

Das beste Ergebnis für beide Spieler ist das Auszahlung (1,1), auf die sich im kooperativen Fall beide Spieler einigen könnten. Einigen sich beide Spieler auch im nicht-kooperativen Fall auf dieses Ergebnis, so besteht für beide Spieler aber ein Anreiz, von der kooperativen Strategie abzuweichen und zwar aus zwei Gründen:

1) Unter der Voraussetzung, der andere wählt kooperativ, kann jeder Spieler ein besseres Ergebnis erzielen, wenn er nicht kooperativ wählt.
2) Bleibt jeder bei der kooperativen Strategie, so ist er derGefahr ausgesetzt, bei Abweichung des anderen das schlechte Ergebnis -2 zu erzielen.

Somit erscheint für jeden die Wahl der nicht-kooperativen Strategie vernünftiger - mit dem Resultat, daß beide das schlechtestmögliche Ergebnis (-5,-5) erzielen - das einzige nicht pareto-optimale Ergebnis in diesem Spiel.
Dieses paradoxe Ergebnis stellt sich auch ein, wenn beide Spieler ihre Gleichgewichtsstrategie wählen - ein Vorgehen, das bei Nullsummenspielen immer zu einem Gleichgewichtspunkt und damit zu einer optimalen Lösung führt. In Matrix 8 liegen 2 Gleichgewichtspunkte vor: (A_2,B_1) - das von A bevorzugte Ergebnis - und (A_1,B_2) - das von B bevorzugte Ergebnis. Wählen beide Spieler aber ihre Gleichgewichtsstrategie, landen beide bei dem schlechtesten Ergebnis mit dem Auszahlungsvektor (-5,-5).

Im Gegensatz zu Nullsummenspielen kann also bei Nichtnullsummenspielen die Wahl von Gleichgewichtsstrategien dazu führen, daß

1) die Ergebnisse nicht mehr im Gleichgewichtspunkt liegen und
2) die Auszahlungen verschieden sind für verschiedene Gleichgewichtspunkte.

Das Vorschreiben rationaler Strategien ist deshalb bei solchen Spielen problematisch und unter Spieltheoretikern umstritten.

Eine andere Situation liegt bei dem folgenden "Gefangenendilemma"-Spiel vor mit mit der Auszahlungsmatrix

Beispiel: <u>Matrix 9</u>

		B	
		B_1	B_2
A	A_1	(5, 5)	(-10, 10)
	A_2	(10, -10)	(-5, -5)

Gefangenendilemma ist Chicken zwar insofern ähnlich, als beide Spieler versucht sind, von der kooperativen Strategie abzuweichen und beide mit einem schlechteren Ergebnis bestraft werden. Anders als bei Chicken, wo keine dominanten Strategien vorliegen, gibt es hier aber eine dominante Strategie für beide Spieler, nämlich A_2 und B_2, die zugleich die Gleichgewichtsstrategien sind. Wählen beide Spieler aber ihre dominante nicht-kooperative Strategie - was nach dem bislang grundlegenden und unangreifbaren Prinzip der sicheren Sache vorgeschrieben ist - so stellt sich ein Ergebnis ein, das für beide Spieler nicht optimal ist. Beide könnten besser abschneiden, wenn sie kooperativ wählen würden.

Bei nicht-kooperativen Nichtnullsummenspielen kann also sowohl die Wahl von Gleichgewichtsstrategien als auch die Einhaltung des stärksten Rationalitätsprinzips der sicheren Sache zu unbefriedigenden Ergebnissen führen.
Ein möglicher Ausweg ist die Aufspaltung des Rationalitätsbegriffs in **individuelle und kollektive Rationalität.** Individuelle Rationalität schreibt die Wahl der nicht-kooperativen Strategie vor, kollektive Rationalität die Wahl der kooperativen Strategie. Kollektive Rationalität setzt aber bestimmte durchsetzbare Übereinkünfte voraus. Beim Gefangenendilemma, das übrigens ein Modell für viele soziale und ökonomische Wettbewerbssituationen wie Rüstungswettlauf, wirtschaftliche Konkurrenz etc. ist, wird das kollektiv rationale Ergebnis in empirischen Situationen durch soziale Normen, Gesetze, Verträge etc. mehr oder weniger erzwungen.
Ein anderer Ausweg, den Harsanyi vorgeschlagen hat, beruht auf der Ausweitung und Verkomplizierung des (individuellen) Rationaliätsbegriffs.

Ein weiterer interessanter Lösungsvorschlag stammt von N. Howard (1971). Howard bringt das Gefangenendilemma durch Einführung von Metastrategien zu einer Lösung, wobei die Lösung die Eigenschaft hat
1) im Gleichgewicht zu sein,
2) Ergebnis der Wahl dominanter Strategien zu sein.
Howards Metaspiel wird dadurch erzeugt, daß die Reaktion von Spieler A auf die möglichen Strategien von B und umgekehrt die Reaktion von B auf die möglichen Strategien von A berücksichtigt werden.
Nehmen wir vorerst an, B hat lediglich die Wahl zwischen B_1 und B_2 wie im ursprünglichen Gefangenendilemma. Dann stehen A vier Metastrategien als bedingte Strategien zur Verfügung:

A_1: Wahl der kooperativen Strategie ohne Rücksicht auf B's Wahl;
A_2: Wahl derjenigen Strategie, für die sich B entscheidet

(Wie-du mir-so-ich-dir, engl.: Tit-for-Tat);

A_3: Wahl der entgegengesetzten Strategie, für die sich B entscheidet;

A_4: Wahl der nicht-kooperativen Strategie ohne Rücksicht auf B's Wahl.

Unter diesen Bedingungen lauten die Auszahlungen mit Matrix 9 wie folgt:

Tabelle 2: Matrix mit Metastrategien für Spieler A

		Bedingte Strategien A			
		A_1	A_2	A_3	A_4
B	B_1	(5, 5)	(5, 5)	(-10 10)	(-10, 10)
	B_2	(10, -10)	(-5, -5)	(10, -10)	(-5, -5)

In dieser Matrix gibt es eine dominante Strategie für A, nämlich A_4, und genau einen Gleichgewichtspunkt (B_2,A_4); das Dilemma bleibt also bestehen, da beide mit (-5,-5) weniger erhalten wie bei Kooperation.

Das Dilemma löst sich allerdings auf, wenn B's Metastrategien einbezogen werden. Für jede von A's 4 möglichen Metastrategien hat B je 4 mögliche Metastrategien, so daß B insgesamt 16 verschiedene bedingte Strategien hat. So kann etwa B immer B_1 spielen egal welche Wahl A trifft (dies sei mit 1111 abgekürzt) oder er kann 1122 spielen, d.h. kooperativ, wenn B erwartet, daß A kooperativ bzw. tit-for-tat spielt und nicht-kooperativ wenn B erwartet, A spiele nicht-kooperativ bzw. die B entgegengesetzte Strategie.

Insgesamt ergeben sich somit 64 mögliche Ergebnisse, die in der folgenden Tabelle aufgelistet sind:

Tabelle 3: Metastrategien von Spieler A und Spieler B

		Bedingte Strategien von A			
		A_1	A_2	A_3	A_4
	1111	(5, 5)	(5, 5)	(-10, 10)	(-10, 10)
	1112	(5, 5)	(5, 5)	(-10, 10)	(-5, -5)
	1121	(5, 5)	(5, 5)	(10, -10)	(-10, 10)
	1211	(5, 5)	(-5, -5)	(-10, 10)	(-10, 10)
Be-	2111	(10, -10)	(5, 5)	(-10, 10)	(-10, 10)
ding-	1122	(5, 5)	$\boxed{(\ 5,\ 5)}$	(10, -10)	(-5, -5)
te	1212	(5, 5)	(-5, -5)	(-10, 10)	(-5, -5)
Strat.	2112	(10, -10)	(5, 5)	(-10, 10)	(-5, -5)
von	1221	(5, 5)	(-5, -5)	(10, -10)	(-10, 10)
B	2121	(10, -10)	(5, 5)	(10, -10)	(-10, 10)
	2211	(10, -10)	(-5, -5)	(-10, 10)	(-10, 10)
	2221	(10, -10)	(-5, -5)	(10, -10)	(-10, 10)
	2212	(10, -10)	(-5, -5)	(-10, 10)	(-5 -5)
	2122	(10, -10)	$\boxed{(\ 5,\ 5)}$	(10, -10)	(-5 -5)
	1222	(5, 5)	(-5, -5)	(10, -10)	(-5 -5)
	2222	(10, -10)	(-5, -5)	(10, -10)	$\boxed{(\ -5\ \ -5)}$

In dieser erweiterten "Meta-Matrix" gibt es 3 Gleichgewichtspunkte (umrandet), wovon das Gleichgewicht in der rechten unteren Ecke der Gleichgewichtspunkt des ursprünglichen Gefangenendilemmas mit dem schlechten Ergebnis für beide Spieler ist.

Es gibt aber noch zwei weitere Gleichgewichtspunkte jeweils mit den Auszahlungen (5,5), also dem besten Ergebnis für beide Spieler. Die beiden Punkte werden dann erreicht, wenn A A_2 wählt und B entweder 1122 oder 2122. Weicht einer der Spieler von der Strategie, die zu diesen Punkten führt, ab, so schneidet er nie besser ab, wenn der andere seine Gleichgewichtsstrategie beibehält. Für A ist es also unbedingt rational, A_2 zu wählen.

Die Suche nach dominanten Strategien fällt für A negativ

aus, für B liegt aber eine dominante Strategie vor, nämlich 2122. Nach dem Prinzip der sicheren Sache hat B 2122 zu wählen, dies ist auch genau eine von B's Gleichgewichtsstrategien.
Die beiden Rationalitätsregeln "Wähle Gleichgewichtsstrategien" und "Wähle dominante Strategien" führen also bei Betrachtung des Gefangenendilemmas als Metaspiel zum Erfolg: beide Spieler erhalten die Auszahlung +5, das meiste, was sie zusammen bekommen können. Die Strategien, die zu diesem Ergebnis führen sind A`s Tit-for-Tat-Strategie A_2 und B's Strategie 2122. Die Tit-for-Tat-Strategie von A läßt sich mit dem Satz "ich werde dann und nur dann kooperieren, wenn du kooperierst" wiedergeben und B's Entscheidung mit "Wenn das so ist, dann werde ich mit dir kooperieren".
Damit ist die Kooperation eines jedes von der des anderen abhängig. Individuelle und kollektive Rationalität sind vereint.[4)]

Tit-for-Tat war dann auch diejenige Strategie, die bei einer von R. Axelrod durchgeführten Computersimulation am besten abschnitt. Axelrod lud eine Reihe professioneller Spieltheoretiker - aber auch Computerfreaks - ein, möglichst viele Strategien für das Gefangenendilemma in einem Turnier alle gegen alle einzureichen. Die Strategien sollten in Form von Computerprogrammen eingereicht werden, Sieger sollte dasjenige Programm sein, das im Spiel alle gegen alle die meisten Punkte erreichte. Sowohl beim ersten, als auch beim zweiten noch größeren Turnier erwies sich die von A. Rapoport eingereichte einfache Tit-for-Tat Strategie als der überlegene Sieger über teilweise sehr diffizile und komplizierte Programme.
Eine sehr gute Zusammenfassung der Ergebnisse dieses Wettbewerbs findet sich in Hofstadter (1983). Im Anhang dieser Arbeit ist ein Pascal-Programm zum Gefangenendilemma aufgelistet, das einige der eingereichten Strategien benutzt.

5. n-Personenspiele

Wir beschränken uns im folgenden auf kooperative n-Personenspiele.[5]

Kooperative n-Personenspiele werden anders als die bislang behandelten Spiele in der Regel in Form einer charakteristischen Funktion angegeben.

Formal ist ein n-Personenspiel gegeben durch ein Tupel $\langle N,v \rangle$ mit der Menge $N = \{1,2,\ldots,n\}$ der n Spieler und der charakteristischen Funktion v, die allen $S \subseteq N$ einen Wert v(S) zuordnet:

$v: 2^N \longrightarrow R.$

S kann als Menge aller möglichen Koalitionen interpretiert werden, die die n Spieler eingehen können. Die charakteristische Funktion v ordnet dann allen $s \in S$ den miminalen gemeinsamen Gewinn zu, den die Mitglieder der Koalition s zusammen erhalten.[6]

Für v werden folgende Bedingungen gefordert (Superadditivität):

1) $v(\emptyset) = 0,$

2) $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \qquad \forall\ S,T \in N$ und $S \cap T = \emptyset.$

Die erste Bedingung besagt, daß die leere Koalition keine Auszahlung erhält, die zweite, daß die Vereinigung zweier disjunkter Koalitionen mindestens soviel erhält, wie wenn sie getrennt bleiben würden.

Beispiel:

Sei $N = \{A,B,C\}$; dann ist

$S = Pot(N) = \{\emptyset,\{A\},\{B\},\{C\},\{A,B\},\{A,C\},\{B,C\},\{A,B,C\}\}.$

Angenommen, es sei $v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 1,$

$v(\{A,B\}) = v(\{B,C\}) = v(\{A,C\}) = 11,$

$v(\{A,B,C\}) = 12,$

dann gilt z.B. $v(\{A,B,C\}) = 12 \geq v(\{A\}) + v(\{B,C\}) = 12$ und das entsprechende für alle anderen Koalitionen, so daß die Bedingung der Superadditivität erfüllt ist.

Falls nun der Wert der großen Koalition S=N größer ist als der Wert der restlichen Koalitionen S\N, erscheint die

Bildung der großen Koalition als rational.
Falls es zu dieser Koalition kommt, stellt sich die Frage, wie die gemeinsame Auszahlung v(N) aufgeteilt werden soll. Natürlich möchte jeder Spieler mindestens soviel erhalten, wie wenn er der Koalition nicht beigetreten wäre, außerdem addieren sich die Auszahlungen in diesem Fall zum Höchstbetrag v(N). Aufteilungen dieser Art nennt man **Imputationen.** Formal ist eine Imputation also eine Menge von Auszahlungsvektoren mit folgenden Eigenschaften:

$$\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n):\ x_i \geq v(i),\quad i=1,2,\ldots,n;\ \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)\right\}$$

Für das obige Beispiel wäre der Auszahlungsvektor (4,4,4) eine Imputation, da $x_i = 4 \geq v(i) = 1$ für alle i und

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 12 = v(N).$$

Imputationen befriedigen also sowohl die kollektive Rationalität, da die Spieler zusammen die höchste Auszahlung erhalten, als auch die individuelle Rationalität, da jeder mindestens so gut abschneidet, wie wenn er der Koalition nicht beigetreten wäre.
Welche Imputationen werden sich nun ergeben?
Die Spieler einer Koalition T werden die große Koalition N dann verlassen, wenn gilt: v(T) > v(N) d.h.

$$v(T) > \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Auf dieser Basis läßt sich die Dominanzrelation für Imputationen einführen:
Eine Imputation x dominiert eine Imputation y bezüglich einer Koalition T gdw alle Mitglieder von T bei x mehr erhalten als bei y und die Mitglieder gemeinsam mindestens so viel erhalten wie in y, formal (mit '>>' als Symbol für die Dominanzrelation):

$$x \gg_T y \iff \forall i \in T: (i \in T \Rightarrow x_i > y_i \;\&\; \sum_{i=1}^{n} x_i \leq v(T))$$

Beispiel:
Im obigen Beispiel dominiert in der großen Koalition $\{A,B,C\}$ die Imputation $x = (3,5,4)$ die Imputation $y = (5,4,3)$ bezüglich $\{B,C\}$, da $x_2 = 5 > y_2 = 4$ und $x_3 = 4 > y_3 = 3$ und $x_2 + x_3 = 9 < v(\{B,C\}) = 11$.
B,C werden daher x y vorziehen.

Man kann also allgemein definieren, daß eine Imputation x eine Imputation y dominiert gdw es eine Koalition $T \subset N$ gibt, so daß x y in bezug auf T dominiert, formal:

$$x \gg y \iff \exists T(T \subset N \;\&\; x \gg_T y).$$

Jede normative Theorie könnte nun nicht-dominierte Imputationen, die auch als **Kern des Spiels** bezeichnet werden, als Lösung eines Spiels vorschreiben, da solche Imputationen mit der individuellen und kollektiven Rationalität jeder Teilmenge von Spielern vereinbar wäre.
Bei einem großen Teil der n-Personenspiele ist der Kern aber die leere Menge, so daß jede Imputation durch eine andere dominiert wird. Kernlösungen können aber nur für solche Spiele gelten, bei denen der Kern nicht leer ist.
Zwei Lösungskonzepte seien neben der Kernlösung abschließend vorgestellt:

1. Die von Neumann-Morgenstern Lösung

Die von Neumann-Morgenstern (NM-) Lösung zeichnet keine bestimmte Imputation als Lösung aus, sondern eine Menge von Imputationen. Eine NM-Lösung ist eine Imputationsmenge I_0, für die gilt:

1) Keine Imputation $x \in I_0$ dominiert eine andere Imputation $y \in I_0$:

$\forall x,y$: $(x \in I_0$ & $y \in I_0$ => $\neg (x >> y))$.

2) Jede Imputation x, die nicht in I_0 liegt, wird von einer Imputation y in I_0 dominiert:
$\forall x$: $(\neg (x \in I_0)$ => $\exists y(y \in I_0$ & $y >> x))$.

Die NM-Lösung soll hier nicht weiter behandelt werden, ein Beispiel findet sich in Rapoport (1980: 268-269).

2. Die Shapley-Lösung

Die Shapley-Lösung ist einfacher als die NM-Lösung und hat den Vorteil, daß sie genau eine Imputation auszeichnet.
Es sei angenommen, daß gerade eine Koalition $T \subset N$ gebildet wurde und alle Koalitionsbildungen vorläufig sind, um den Spielern die Festlegung ihrer Verhandlungspositionen zu erlauben. Nach Festlegung der Verhandlungspositionen soll die große Koalition N gebildet werden und der Wert der großen Koalition entsprechend den Verhandlungspositionen aufgeteilt werden.
Spieler $i \in T$ kann sich nun überlegen, ob er der gerade versuchsweise gebildeten Koalition T beitreten soll, wobei durch die charakteristische Funktion v der Wert v(T) bekannt ist. Tritt i der Koalition bei, so ist $v(T \cup \{i\})$ der Wert des Spiels für die Koalition T mit dem neuen Mitglied i. Folglich ist der Wert des Spieler i für die Koalition T gegeben durch $v(T \cup \{i\}) - v(T)$.

Beispiel:
Gegeben sei ein 3-Personenspiel mit
$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0;$
$v(\{A,B\}) = 30;$ $v(\{A,C\}) = 20;$ $v(\{B,C\}) = 50;$
$v(\{A,B,C\}) = 80.$
Wenn wir beispielsweise von der Einer-Koalition A ausgehen, so ist $v(\{A\} \cup \{B\}) = v(\{A,B\}) = 30;$
also ist $v(\{A,B\}) - v(\{B\}) = 30 - 0 = 30$ der Wert des Spielers B für die Einer-Koaltion A.
Tritt nun zur Koalition $\{A,B\}$ Spieler C hinzu, so gilt:
$v(\{A,B\} \cup \{C\}) = v(\{A,B,C\}) = 80;$

also ist $v(\{A,B,C\}) - v(\{A,B\}) = 80 - 30 = 50$ der Wert von Spieler C für die Koalition $\{A,B\}$.

Jeder Spieler hat also eine bestimmte "Koalitionspotenz" in Abhängigkeit von der Reihenfolge der Rekrutierung der Koaltionen. Berücksichtigt man alle möglichen Reihenfolgen, so kann mit dem obigen Beispiel der Shapley-Wert mit folgender Tabelle errechnet werden:

Tabelle 4: Berechnung des Shapley-Werts

		Beiträge A	Beiträge B	Beiträge C	Summe
	A B C	0	30	50	80
Reihen-	A C B	0	60	20	80
folge	B A C	30	0	50	80
der	B C A	30	0	50	80
Rekrutier.	C A B	20	60	0	80
	C B A	50	30	0	80
Mittel-werte		130/6	180/6	170/6	

Der Shapley-Wert ist gegeben durch den Vektor (130/6, 180/6, 170/6) mit den Auszahlungen 130/6 an A, 180/6 an B und 170/6 an C. Offensichtlich ist A der schwächste Spieler: er bringt als Partner in einer Koalition am wenigsten Gewinnzuwachs, während B mit einer Auszahlung von 180/6 der stärkste Spieler ist. Anwendungsbeispiele zur Shapley-Lösung finden sich in Rapoport (1980: 270-275).

Anmerkungen:

1) Die Vorzüge der Spieltheorie bei Anwendung auf empirische Wissenschaften liegen vor allen Dingen in drei Bereichen (vgl. Diekmann 1983: 2): Erstens stellt sie Denkmodelle zum Studium von Konfliktsituationen zur Verfügung und ermöglicht es, unterschiedliche Handlungsstrukturen zu klassifizieren, zweitens gibt sie Empfehlungen für eine rationale Handlungsweise und drittens kann das Verhalten in Konfliktsituationen experimentell untersucht werden.
2) Vgl. zu den Nullsummenspielen vor allem die Darstellung in Schrage/Baumann (1984: 134-165) und Wentzel (1976).
3) Es ist möglich, daß die Folge der Paare (p(k),q(k)) nicht konvergiert. In diesem Fall strebt jedoch jede konvergente Teilfolge gegen eine Lösung des Spiels. Für den Fall, daß das Spiel eindeutig lösbar ist, läßt sich zeigen, daß die Folge der Paare (p(k),q(k)) gegen die Lösung konvergiert (Schrage/Baumann 1984: 163).
4) Die von Howard propagierte Lösung des Gefangenendilemmas nimmt insofern auch eine bemerkenswerte Stellung ein, "...weil sie im Geiste der Lösung jener Methode, die den beständigen Reifungsprozeß logischer und mathematischer Konzepte kennzeichnet, erreicht wurde. Zu dieser Methode gehört, daß man den konzeptuellen Rahmen, in dem eine Paradoxie oder ein scheinbar unlösbares Problem aufgetaucht ist, verläßt und den Rahmen selbst in einen neuen Zusammenhang stellt, so daß die Grenzen des alten Konzepts sichtbar werden." (Rapoport 1967: 56)
5) Vgl. zu den n-Personenspielen vor allem die Darstellung in Rapoport (1980: 265-275).
6) Es muß vorausgesetzt werden, daß die Auszahlungen der Spieler addiert werden können, wozu eine stärkere als die gewöhnliche Intervallskala gegeben sein muß. Dies ist der Fall, wenn die Auszahlungen Geldbeträge sind, die auf Ratioskalenniveau liegen (Ratioskalen sind eindeutig bis auf Ähnlichkeitstransformationen).

Anhang:

```
program spielapproximation;
(*Berechnet naeherungsweise optimale Strategien und Werte fuer 2-Personen
Nullsummenspiele (maximal 10x10-Spiele)*)
type tvektor = array[1..10] of integer;
     tmatrix = array[1..10,1..10] of integer;
var n,m,ko,k,i,j: integer;
    zh,zs,sh,ss : tvektor;
    a:             tmatrix;

procedure matrixeingabe(m,n: integer; var a: tmatrix);
    var i,j: integer;
    begin
        write('Matrixeingabe (zeilenweise;nach jeder Eingabe ');
        writeln('RETURN; Abschluss 2 mal RETURN):');
        for i:= 1 to m do begin
           for j:=1 to n do readln(a[i,j]);
       end; readln;writeln;
    end;

procedure iteration (ko,k: integer; zh,zs,sh,ss: tvektor);
    var max,min,i,j: integer;

    procedure endloesung;
    var zmin,smax: integer;
       begin
          zmin := zs[1]; smax := ss[1];
          writeln;writeln;
          write('Optimale Loesung Zeile: (');
          for i:=1 to m do
          begin
          if zs[i] < zmin then zmin := zs[i];
          write(zh[i]/ko :4:2,',');
          end;
          writeln(')');
          write('Optimale Loesung Spalte: (');
          for i:=1 to n do
          begin
          if ss[i]> smax then smax := ss[i];
          write(sh[i]/ko:4:2,',');
          end;
          writeln(')');
          writeln;
          write('Wert des Spiels: ', zmin/ko:6:2,' s v s ',smax/ko:6:2);
       end;

    procedure ausgabe;
       begin
          writeln;
          write(k:5,':     ');
          for i:=1 to m do write(zh[i]:3,' ');
          write('    ');
          for j:=1 to n do write(zs[j]:3,' ');
          write('    ');
          for j:= 1 to n do write(sh[j]:3,' ');
          write('    ');
          for i:=1 to m do write(ss[i]:3,' ');
          if k = ko then endloesung;
       end;
```

```
    begin
     if k <= ko then
       begin
        ausgabe;
        max :=1;
        for i:= 1 to m do if ss[max] < ss[i] then max := i;
        zh[max] := zh[max] + 1;
        min :=1;
        for j:=1 to n do if zs[min] > zs[j] then min := j;
        sh[min] := sh[min] + 1;
        for j:=1 to n do zs[j] := zs[j] + a[max,j];
        for i:= 1 to m do ss[i] := ss[i] + a[i,min];
        iteration(ko,k+1,zh,zs,sh,ss)
      end;
    end;

begin                              (*Hauptprogramm*)
  writeln;writeln;
  write('Zeilenzahl?    '); readln(m);
  write('Spaltenzahl?    '); readln(n);
  writeln;
  matrixeingabe(m,n,a);
  writeln;
  write('Anzahl der Iterationen:  ');
  readln(ko);
  writeln;
  k:=0;
  for i:=1 to m do zh[i] :=0;
  ss := zh;
  for j := 1 to n do sh[j] :=0;
  zs :=sh;
  iteration(ko,k,zh,zs,sh,ss);
end.
```

```
program gefangenendilemma;
const max = 200;
var i,j,k,a,anz,punktl,punkt2: integer;
         spieler_1, spieler_2: array[1..max] of char;
         strategie_1, strategie_2: char;

                                           (*Strategien*)
function immer_C: char;                    (*Spielt immer Kooperativ C*)
  begin
  immer_C:='C';
  end;

function titfortat(l,j:integer): char;
  begin
   if j=l then
     titfortat := 'C'
     else if j > l then
       begin
        k:= j-l;
        case l of l:
          begin
           if spieler_2[k] = 'C' then
           titfortat := 'C'
           else if spieler_2[k] = 'D' then
           titfortat := 'D';
          end;end;
        case l of 2:
          begin
           if spieler_l[k] = 'C' then
           titfortat := 'C'
           else if spieler_l[k] = 'D' then
           titfortat := 'D';
         end; end;
end;
end;

function zufall(l: integer): char;
                   (*Spielt C bzw. D mit 50% Wahrscheinl.*)
var hilf: byte;
  begin
    hilf:= random(2);
    case l of l:
      begin
        case hilf of
           0: zufall := 'C';
           l: zufall := 'D';
    end;end;end;
    case l of 2:
      begin
        case hilf of
           0: zufall := 'C';
           l: zufall := 'D';
      end; end;
end;
end;

function ewige_verdammnis(l,j:integer;var a: integer):char;
begin    (*Spielt C solange, bis Gegner erstmals D spielt*)
 if j=l then                              (*dann immer D*)
   begin ewige_verdammnis := 'C'; a:=l; end
   else if j > l then

      begin
        k:= j-l;
        case l of l:
```

```
        begin
          case spieler_2[k] of
            'D': begin
                 a := 0;
                 ewige_verdammnis := 'D';
                 end;
            end;
          case spieler_2[k] of
            'C': begin
                 ewige_verdammnis := 'C';
                 end;
           end;
       if a = 0 then ewige_verdammnis := 'D';
       end;end;
      case l of 2:
        begin
           case spieler_1[k] of
              'D': begin
               a := 0
               ewige_verdammnis := 'D';
               end;
             end;
           case spieler_1[k] of
              'C': begin
               ewige_verdammnis := 'C';
               end;
             end;
 if a = 0 then ewige_verdammnis := 'D';
end;end
end;end;

function immer_D: char;
  begin
  immer_D:= 'D';
  end;

function Dletzt(i:integer): char;
                    (*Spielt immer C, zuletzt D*)
  begin
    if i <> anz then dletzt := 'C'
    else dletzt:='D';
   end;

begin                          (*Hauptprogramm*)
  clrscr;
  write('************ G E F A N G E N E N D I L E M M A
  writeln(' ***************');
  writeln;
  writeln('Strategien:  A: wie du mir, so ich dir');
  writeln('             B: Zufall');
  writeln('             C: Immer Kooperativ');
  writeln('             D: Immer Abweichen');
  writeln('             E: Immer Koop., letztes Abweichen');
  writeln('             F: Ewige Verdammnis');
  writeln;
  write('Strategie Spieler 1: ');
  repeat  read(kbd,strategie_1);
  strategie_1:= upcase(strategie_1)
  until strategie_1 in ['A','B','C','D','E','F'];
  writeln(strategie_1);
  write('Strategie Spieler 2: ');
  repeat read(kbd,strategie_2);
  strategie_2:= upcase(strategie_2)
  until strategie_2 in ['A','B','C','D','E','F'];
  writeln(strategie_2);
```

```
    write('Anzahl der Spiele (Minimum 1; Maximum ', max,'): ');
    repeat read(anz)
    until anz in [1..max];
    writeln;writeln;
    for i:= 1 to anz do
    begin
        case strategie_1 of
           'A':  spieler_1[i]:= titfortat(1,i);
           'C':  spieler_1[i]:= immer_C;
           'B':  spieler_1[i]:= zufall(1);
           'D':  spieler_1[i]:= immer_D;
           'E':  spieler_1[i]:= Dletzt(i);
           'F':  spieler_1[i]:= ewige_verdammnis(1,i,a);
        end;
        case strategie_2 of
           'A':  spieler_2[i] := titfortat(2,i);
           'C':  spieler_2[i] := immer_C;
           'B':  spieler_2[i] := zufall(2);
           'D':  spieler_2[i] := immer_D;
           'E':  spieler_2[i] := Dletzt(i);
           'F':  spieler_2[i] := ewige_verdammnis(2,i,a);
       end;
  end;

  punkt1:=0;
  punkt2:=0;
  for i:=1 to anz do
     begin
        if (spieler_1[i]='C') and (spieler_2[i]='C') then
           begin
              punkt1:=punkt1 + 5;
              punkt2:=punkt2 + 5;
           end;
        if (spieler_1[i]='C') and (spieler_2[i]='D') then
           begin
              punkt1:=punkt1-10;
              punkt2:=punkt2 + 10;
           end;
        if (spieler_1[i]='D') and  (spieler_2[i]='C') then
           begin
              punkt1:=punkt1 + 10;
              punkt2:=punkt2 - 10;
           end;
        if (spieler_1[i]='D') and (spieler_2[i]='D') then
           begin
              punkt1:=punkt1 - 5;
              punkt2:=punkt2 - 5;
           end;
     end;

  writeln;
  writeln('Spieler 1 hat ',punkt1, ' Punkte');
  writeln('Spieler 2 hat ',punkt2, ' Punkte');
  writeln;
  writeln;
  if punkt1 > punkt2 then
     writeln('SPIELER 1 HAT GEWONNEN');
  if punkt1 < punkt2 then
     writeln('SPIELER 2 HAT GEWONNEN');
  if punkt1 = punkt2 then
     writeln('UNENTSCHIEDEN');
end.
```

Literaturverzeichnis:

Brown, G.W.(1951), Iterative Solutions of games by fictitious play.
Activity analysis of production an allocation, Cowles Comission Monograph 13.

Diekmann, A. (1983), Kooperation als Überlebensstrategie.
Wien: Institut für Höhere Studien.

Hofstadter, D.R. (1983), Kann sich in einer Welt voller Egoisten kooperatives Verhalten entwickeln?
Spektrum der Wissenschaft 8/83: 8-14).

Howard, N. (1971), Paradoxes of Rationality: The Theory of Metagames and Political Behavior.
Cambridge Mass.: MIT Press.

Owen, G. (1971), Spieltheorie.
Berlin-Heidelberg-New York: Springer.

Rapoport, A. (1966), Two-Person Game Theory.
Ann Arbor: The University of Michigan Press.

Rapoport, A. (1967), Escape from Paradox.
Scientific American 7/67: 50-56.

Rapoport, A. (1980), Mathematische Methoden in den Sozialwissenschaften.
Würzburg-Wien: Physica.

Schrage G./Baumann R. (1984), Strategiespiele.
München-Wien: Oldenbourg.

Wentzel, J.S. (1976), Elemente der Spieltheorie.
Frankfurt a.M.: Deutsch.